# Eesti koolinoorte LIV täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA KOOLIVOOR

Tallinnas, 8. jaanuaril 2008. a.

XI klass

Lahendamiseks on aega 4 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Isa ja kaks poega lähevad 33 km kaugusele külla vanaemale. Isal on motoroller, mille kiirus on $25\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ning lubatud ühe kaasreisijaga $20\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mõlemad pojad kõnnivad kiirusega $5\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Näita, et kõik kolm võivad üheaegselt kolme tunniga jõuda vanaema juurde.

2. Kolmnurga ABC külgede AB, BC ja AC võrrandid on vastavalt $x+21y-22=0$, $5x-12y+7=0$ ja $4x-33y+146=0$. Leia selle kolmnurga raskuskeskme kaugus koordinaatide alguspunktist.

3. Lahenda võrrand $\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=\frac{49}{x-50}+\frac{50}{x-49}$. Võrrandi kontroll pole nõutav.

4. Ringjoone keskpunkt asub täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusil AB. Ringjoon läbib punkti A ning puutub kaatetit BC punktis M. Tõesta, et lõik AM on nurga BAC poolitaja.

5. Kadi ja Liis mängivad mänguribal $1\times N$ järgmist mängu. Alguses on kõik ruudud värvimata. Mängija värvib käigul olles ära kas ühe ruudu või kaks kõrvuti asetsevat ruutu. Mängu võidab mängija, kelle käigu järel saab kogu riba värvituks. Mängu alustab Kadi. Kumb tüdrukutest võidab parima mängustrateegia korral, kui N on
   a) 2007;
   b) 2008?

# LAHENDUSED

**1. Tõestus:**

Sõitku isa esimese pojaga x kilomeetrit. Selleks kulub vastavalt tekstile $\frac{x}{20}$ tundi ning vahemaa teise pojaga on selleks hetkeks $\frac{x}{20} \cdot 15 = \frac{3}{4}x$ (km).

Isa ja poja kiiruste vahe on 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Nüüd sõidab isa järele teisele pojale ning kohtub temaga $\frac{3}{4}x : 30 = \frac{x}{40}$ (tunni) pärast.

Isa ja poja kiiruste summa on 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Kohtumiseni isaga läbis teine poeg $\left(\frac{x}{20} + \frac{x}{40}\right) \cdot 5 = \frac{3}{8}x$ (km) ning lõpuni jäi tal veel $\left(33 - \frac{3x}{8}\right)$ km.

Et kõik kolm jõuavad korraga vanaema juurde juhul, kui isa sõidutab poegi võrdse vahemaa, siis

$$x = 33 - \frac{3x}{8}, \text{ millest } x = 24 \text{ km.}$$

Vanaema juurde jõudmiseks kulub kokku aega

$$\frac{x}{20} + \frac{33-x}{5} = \frac{24}{20} + \frac{9}{5} = 3 \text{(tundi)}$$

<u>Kontroll.</u>

Esimesel pojal kulub aega $\frac{x}{20} + \frac{33-x}{5} = \frac{24}{20} + \frac{9}{5} = 3$ (tundi).

Teisel pojal ja isal kulub aega

$$\frac{x}{20} + \frac{x}{40} + \frac{33 - \frac{3x}{8}}{20} = 1\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{33-9}{20} = 1\frac{4}{5} + \frac{24}{20} = 3 \text{ (tundi).}$$

**M. o. t. t.**

**2.** Kolmnurga tippude koordinaadid saame vastavate võrrandite süsteemide lahenditena.

1) $\begin{cases} x + 21y - 22 = 0 \\ 5x - 12y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$

2) $\begin{cases} 4x - 33y + 146 = 0 \\ 5x - 12y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(13;6)$

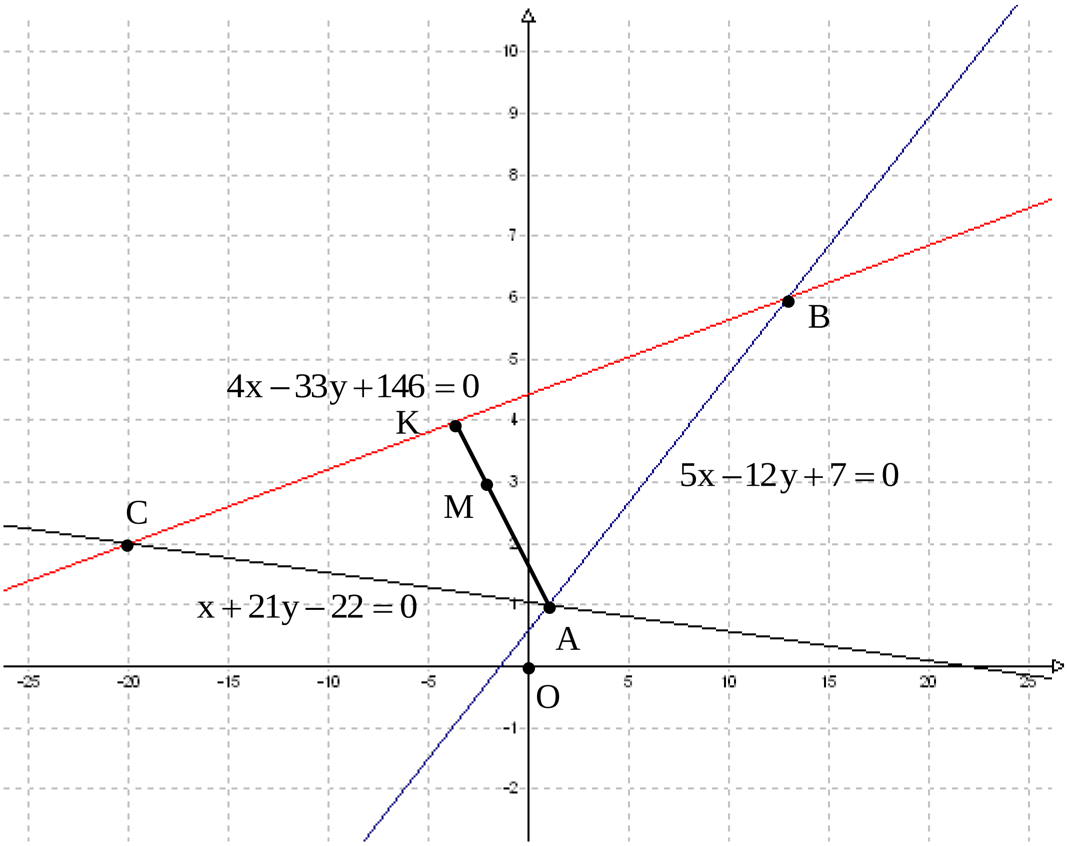
3) $\begin{cases} 4x - 33y + 146 = 0 \\ x + 21y - 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-20;2)$

Külje BC keskpunkti K leian lõigu otspunktide abil:

$$K\left(\frac{-20+13}{2};\frac{2+6}{2}\right), \text{ millest } K\left(-3\frac{1}{2};4\right)$$

Niisiis on sirglõik AK üks kolmnurga ABC mediaanidest. Et raskuskese M jaotab lõigu AK suhtes 2:1 (2 ühikut tipu A poole), siis vastavalt kaalutud keskmisele:

$$M\left(\frac{2\cdot\left(-3\frac{1}{2}\right)+1\cdot 1}{3};\frac{2\cdot 4+1\cdot 1}{3}\right) \Rightarrow M(-2;3)$$




Punkti M kaugus koordinaatide alguspunktist on $|OM| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

**Kolmnurga raskuskeskme kaugus koordinaatide alguspunktist on $\sqrt{13}$.**

**3.** $$\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=\frac{49}{x-50}+\frac{50}{x-49}$$

Tähistame $\frac{x-49}{50}=a$ ja $\frac{x-50}{49}=b$. Sellise juhul saab võrrand kuju

$$a+b=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Teisendame võrrandit järgmiselt:

$$a+b=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \quad \Big|\cdot ab$$

$$a^2b+ab^2=a+b$$

$$ab(a+b)-(a+b)=0$$

$$(a+b)(ab-1)=0$$

Saame kaks varianti.

1) $a+b=0$, millest

$$\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=0 \quad \Big|\cdot 50\cdot 49$$

$$49x-49^2+50x-50^2=0$$

$$99x=50^2+49^2$$

$$99x=4901 \quad \Big|:99$$

$$x_1=\frac{4901}{99}=49\frac{50}{99}$$

2) $ab-1=0$, millest

$$\frac{x-49}{50}\cdot\frac{x-50}{49}=1 \quad \Big|\cdot 49\cdot 50$$

$$(x-49)(x-50)=2450$$

$$x^2-99x=0$$

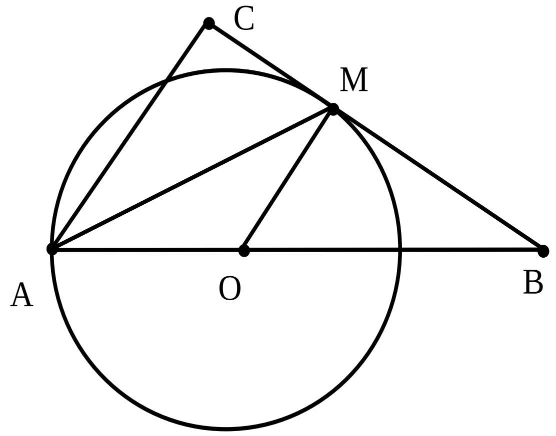
$$x(x-99)=0$$

$$x_2=0,\ x_3=99$$

**Võrrandi lahendid on $\mathbf{x_1=49\frac{50}{99}}$, $\mathbf{x_2=0}$ ja $\mathbf{x_3=99}$.**

**4. Tõestus:**

Teeme joonise.




Olgu O ringjoone keskpunkt. Tõmbame sirglõigu OM.

Kuna OA ja OM on ringjoone raadiused, siis $|OA| = |OM|$ ning kolmnurk AOM on võrdhaarne. Niisiis

$$\angle OMA = \angle OAM. \quad (*)$$

Et puutuja on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega, siis on lõigud OM ja BC omavahel risti. Ülesande teksti kohaselt on samuti risti lõigud AC ja BC.

Siit saame, et lõigud OM ja AC on paralleelsed:

$$OM \parallel AC.$$

Kahe paralleelse sirge lõikamisel kolmandaga tekib paar võrdseid põiknurki, seega

$$\angle OMA = \angle CAM. \quad (**)$$

Arvestades seoseid (*) ja (**) saame, et

$$\angle OAM = \angle CAM.$$

Seega on lõik AM nurga BAC poolitaja.

**M. o. t. t.**

**5. Mõlemal juhul võidab Kadi**.

Kui $N = 2007$, siis esimese käiguga värvib ta ära ühe keskmise ruudu, kui $N = 2008$ aga kaks keskmist ruutu. Mõlemal juhul jääb värvimata kaks $1\times1003$ ruutu. Edasi kasutab Kadi sümmeetrilist strateegiat: kui Liis värvib ära mõned ruudud ühes $1\times1003$ ristkülikus, siis Kadi värvib samadel kohtadel asuvad ruudud teises $1\times1003$ ristkülikus.

On selge, et nii tegutsedes on Kadil alati võimalus käik teha. Liisil aga saavad käigud millalgi otsa ja Kadi võidab.

# HINDAMINE

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Tähelepanek, et isa peab teise poja vedamiseks tagasi sõitma | 1p |
| | Tähelepanek, et poegi on vaja vedada võrdne aeg (teepikkus) | 2p |
| | Võrrandi moodustamine | 2p |
| | Võrrandi lahendamine | 1p |
| | Kontroll ja järeldus | 1p |
| | | **7p** |

Märkus. Kui õpilane esitab õige algoritmi selleks, kuidas 3 tunniga vanaema juurde jõuda ning kontrollib seda, anda 7p.

| | | |
|---|---|---|
| 2. | Kolmnurga tippude leidmine võrrandisüsteemide abil | 3p |
| | Raskuskeskme leidmine | 3p |
| | Kaugus koordinaatide alguspunktist | 1p |
| | | **7p** |

| | | |
|---|---|---|
| 3. | Muutuja vahetus | 1p |
| | Võrrandini $a+b=0$ jõudmine | 1p |
| | Võrrandini $ab-1=0$ jõudmine | 1p |
| | Võrrandi $a+b=0$ lahendamine | 2p |
| | Võrrandi $ab-1=0$ lahendamine | 2p |
| | | **7p** |

Märkus 1. Kui õpilane lahendab võrrandit muutuja vahetuseta, siis õige kuupvõrrandini jõudmise eest anda 4p ning selle lahendamise eest 3p.
Märkus 2. Kui õpilane on ära toonud õiged vastused ning tehtud on nende lahendite sobivuse kontroll, anda iga õige vastuse eest 1p. Ainult õigete vastuste eest ilma kontrollita punkte mitte anda.

| | | |
|---|---|---|
| 4. | Korrektne abistav joonis | 1p |
| | Raadiuse OM tõmbamine | 1p |
| | Tähelepanek, et raadius on risti kaatetiga | 1p |
| | Võrdhaarse kolmnurga AOM märkamine | 1p |
| | Sirglõikude OM ja AC paralleelsuse märkamine | 1p |
| | Põiknurkade märkamine | 1p |
| | Tõestuse lõpuleviimine | 1p |
| | | **7p** |

| | | |
|---|---|---|
| 5. | Sümmeetrilise strateegia idee ja kirjeldus | 3p |
| | a) osa õige avakäik | 1p |
| | a) osa lahenduse lõpuleviimine | 1p |
| | b) osa õige avakäik | 1p |
| | b) osa lahenduse lõpuleviimine | 1p |
| | | **7p** |

Märkus. Ainult täieliku õige vastuse eest (võidab mõlemal korral Kadi) ilma selgituseta anda 1p. Ainult ühe osa õige vastuse eest anda 0p.